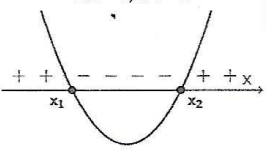
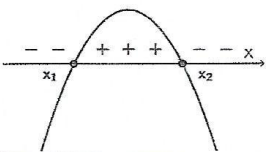
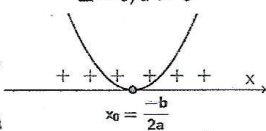
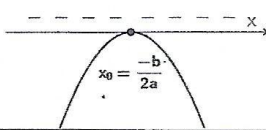
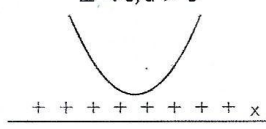
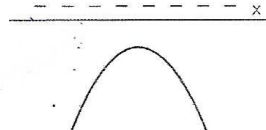


Rodzaje nierówności kwadratowych

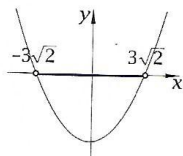
NIERÓWNOŚĆ	$ax^2 + bx + c > 0$	$ax^2 + bx + c \geq 0$	$ax^2 + bx + c < 0$	$ax^2 + bx + c \leq 0$
WYKRES	ZBIÓR ROZWIĄZAŃ NIERÓWNOŚCI			
$\Delta > 0, a > 0$ 	$(-\infty; x_1) \cup (x_2; \infty)$	$(-\infty; x_1) \cup \langle x_2; \infty)$	$\langle x_1; x_2 \rangle$	$\langle x_1; x_2 \rangle$
$\Delta > 0, a < 0$ 	$\langle x_1; x_2 \rangle$	$\langle x_1; x_2 \rangle$	$(-\infty; x_1) \cup (x_2; \infty)$	$(-\infty; x_1) \cup \langle x_2; \infty)$
$\Delta = 0, a > 0$ 	$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{-b}{2a} \right\}$	\mathbb{R}	\emptyset	$\left\{ \frac{-b}{2a} \right\}$
$\Delta = 0, a < 0$ 	\emptyset	$\left\{ \frac{-b}{2a} \right\}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{-b}{2a} \right\}$	\mathbb{R}
$\Delta < 0, a > 0$ 	\mathbb{R}	\mathbb{R}	\emptyset	\emptyset
$\Delta < 0, a < 0$ 	\emptyset	\emptyset	\mathbb{R}	\mathbb{R}

Znaki „+” wskazują zbiór argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartości dodatnie.

Znaki „-” wskazują zbiór argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartości ujemne.

PRZYKŁAD Rozwiąż nierówność.

a) $x^2 - 18 < 0$



$x \in (-3\sqrt{2}; 3\sqrt{2})$

$x^2 - 18 = 0$

$x^2 = 18$

$x = 3\sqrt{2}$ lub $x = -3\sqrt{2}$

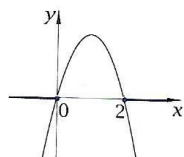
Obliczamy miejsca zerowe funkcji $y = x^2 - 18$.

Zaznaczamy miejsca zerowe i szkicujemy wykres.

$a > 0$, więc ramiona są skierowane w górę.

Z wykresu odczytujemy zbiór rozwiązań nierówności.

b) $-3x^2 + 6x \leq 0$



$x \in (-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$

$-3x^2 + 6x = 0$

$-3x(x - 2) = 0$

$x = 0$ lub $x - 2 = 0$

$x = 2$

Obliczamy miejsca zerowe funkcji $y = -3x(x - 2) = -3x^2 + 6x$.

Zaznaczamy miejsca zerowe i szkicujemy wykres.

$a < 0$, więc ramiona są skierowane w dół.

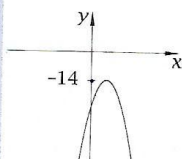
Z wykresu odczytujemy zbiór rozwiązań nierówności.

c) $-(x - 7)^2 \geq 2x + 1$

$-(x^2 - 14x + 49) - 2x - 1 \geq 0$

$-x^2 + 14x - 49 - 2x - 1 \geq 0$

$-x^2 + 12x - 50 \geq 0$



Nierówność nie ma rozwiązań.

$-x^2 + 12x - 50 = 0$

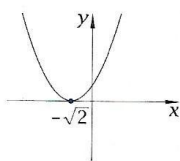
$\Delta = 12^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-50) < 0$

Przekształcamy nierówność.

Funkcja $y = -x^2 + 12x - 50$ nie ma miejsc zerowych, a jej wykres leży poniżej osi x (ramiona paraboli są skierowane w dół), zatem nierówność $-x^2 + 12x - 50 \geq 0$ nie ma rozwiązań.

d) $\frac{x^2}{2} + x\sqrt{2} \leq -1$

$\frac{x^2}{2} + x\sqrt{2} + 1 \leq 0$



$x = -\sqrt{2}$

$\frac{x^2}{2} + x\sqrt{2} + 1 = 0 \quad | \cdot 2$

$x^2 + 2\sqrt{2} \cdot x + 2 = 0$

$\Delta = (2\sqrt{2})^2 - 8 = 8 - 8 = 0$

$x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{-2\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$

Obliczamy miejsca zerowe funkcji $y = \frac{x^2}{2} + x\sqrt{2} + 1$.

Szkicujemy wykres funkcji.

Nierówność $\frac{x^2}{2} + x\sqrt{2} + 1 \leq 0$ spełnia tylko liczba $-\sqrt{2}$.

ZADANIE Rozwiąż nierówność.

a) $2x^2 - 5x > 0$

b) $\frac{1}{2}x^2 + 4x < -8$

c) $3x - 2 \leq 5x^2$

zadania 1-16 ►

Nierówności jak w zadaniach 1-4

ZESTAW ZADAŃ

1. Rozwiąż nierówność.

a) $2(x-1)(x+3) \geq 0$

c) $\frac{5}{9}(x+13)(x+17) \geq 0$

e) $(x-0,5)^2 \leq 0$

b) $-2(x-5)(x-7) > 0$

d) $x(x-3) \leq 0$

f) $-2x(x+3) < 0$

2. Znajdź miejsca zerowe funkcji $y = -6x^2 - 5x + 4$, naszkicuj jej wykres, a następnie ustal rozwiązanie nierówności:

a) $-6x^2 - 5x + 4 > 0$

c) $6x^2 + 5x - 4 \geq 0$

e) $-12x^2 - 10x + 8 \leq 0$

b) $-6x^2 - 5x < -4$

d) $5x \leq 4 - 6x^2$

f) $x^2 + \frac{5}{6}x - \frac{2}{3} < 0$

3. Rozwiąż nierówność.

a) $2x^2 + 5x - 3 \geq 0$

c) $4x^2 - 4x + 1 \leq 0$

e) $-\frac{1}{4}x^2 + 2x + 5 \leq 0$

b) $-3x^2 + x - 4 < 0$

d) $x^2 - x - 12 < 0$

f) $-4x^2 + 8x + 4 \geq 0$

4. Rozwiąż nierówność.

a) $x^2 - 49 < 0$

c) $7x^2 + 2x > 0$

e) $-2(x-7)^2 < 0$

b) $3x^2 \geq 120$

d) $6x \geq 5x^2$

f) $\frac{2}{3}(x+5)^2 \leq 0$

5. Rozwiąż nierówność.

- a) $x^2 - 5x > -6$ d) $3x(x-2) < x$ g) $10x < (3x-1)(x+2)$
 b) $9x^2 + 6x + 4 < 3$ e) $4x \geq -5x(2x+1)$ h) $-x(x-4) > (x-4)(x+1)$
 c) $5x - 10 < 2x^2$ f) $5(x+3) \leq 2x(x+3)$ i) $3x(7-2x) \leq (5x+1)(4-x)$

6. Rozwiąż nierówność.

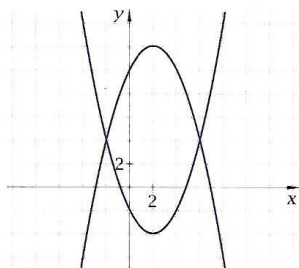
- a) $5(x-2)(x+2) + x \geq 25(1-x)$ c) $2(x-3)^2 - 1 > 7(2-x)$
 b) $5x - 1 \leq (2x-1)^2$ d) $(x-2)^3 \leq (x+1)^3 + 9$

7. Zbiór rozwiązań nierówności $x^2 - 4x - 21 < 0$ to przedział $(-3; 7)$. Korzystając z tej informacji, zapisz zbiór rozwiązań nierówności:

- a) $x^2 - 4x - 21 \geq 0$ b) $-x^2 + 4x < -21$ c) $4x + 21 \geq x^2$

8. a) Dla jakich argumentów wartości funkcji $y = x^2 + 3x - 20$ są mniejsze od 20?

b) Dla jakich argumentów wartości funkcji $y = x^2 + 2x - 33$ są większe od 66?



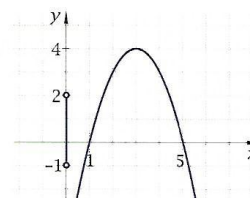
9. Na rysunku pokazano wykresy funkcji: $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 2$ i $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 10$. Dla jakich argumentów wartości funkcji f są większe od wartości funkcji g ?

10. Dla jakich argumentów wartości funkcji f są większe od wartości funkcji g ?

- a) $f(x) = x^2 - x + 1$ b) $f(x) = 3x^2 - x - 2$
 $g(x) = 2x + 1$ $g(x) = -x^2 + 2x + 3$

11. Ustal, dla jakich argumentów wartości funkcji $y = -x^2 + 8x - 22$ są większe od -15 i jednocześnie mniejsze od -7 .

12. Dla jakich argumentów wartości funkcji kwadratowej, której wykres przedstawiono na rysunku obok, należą do przedziału zaznaczonego na osi y ?



13. Znajdź liczby, które spełniają jednocześnie nierówności:

- a) $x^2 - 3x - 10 > 0$ i $\frac{1}{2}x - 1 < 0$ c) $x^2 + 9x + 14 \geq 0$ i $x^2 - 2x \geq 15$
 b) $-2x^2 + 13x - 15 < 0$ i $\frac{3}{2}x - 9 \geq 0$ d) $2x^2 + 17x + 30 \geq 0$ i $-\frac{1}{2}x^2 - 4x < 8$

rośnie w przedziale $(-\infty; \frac{21}{2})$, maleje w przedziale $(\frac{21}{2}; +\infty)$, c) $(-\infty; 3\frac{3}{8})$, rośnie w przedziale $(-\infty; \frac{3}{4})$, maleje w przedziale $(\frac{3}{4}; +\infty)$. 8. a) Jedno miejsce zerowe, b) dwa miejsca zerowe, c) brak miejsc zerowych. 9. a) Pierwsza: $x_1 = 5, x_2 = 2$, b) trzecia: $x_1 = -1, x_2 = -3$, c) druga: $x_1 = 0, x_2 = -\frac{1}{6}$. 10. a) Dla: $x_1 = \frac{7}{2}, x_2 = -\frac{7}{2}$, b) dla: $x_1 = -5, x_2 = -\frac{5}{2}$, c) dla: $x_1 = 1, x_2 = \frac{8}{3}$, d) dla: $x_1 = \frac{15}{2}, x_2 = -5$. 11. a) 16, b) 18, c) 45.

str. 193-194: 1. a) 3, -1, b) 3, c) -3, d) 6, e) 0, 6, f) 0, -8. 2. a) Dla $x \in (1; 7)$, b) dla $x \in (-\infty; -12) \cup (21; +\infty)$, c) dla $x \in (-\infty; -50) \cup (-4; +\infty)$. 3. a) $y = 5x^2 - 5x - 30$, b) $y = -\frac{5}{9}x^2 + \frac{40}{9}x - \frac{80}{9}$, c) $y = -2x^2 - 30x - 100$, d) $y = 7x^2 - 84x + 252$. 4. a) Funkcja maleje w przedziale $(-\infty; -1)$, a rośnie w przedziale $(-1; +\infty)$, b) funkcja rośnie w przedziale $(-\infty; -2)$, a maleje w przedziale $(-2; +\infty)$, c) funkcja rośnie w przedziale $(-\infty; -13)$, a maleje w przedziale $(-13; +\infty)$. 5. a) $p = -5, q = \frac{1}{2}$; z osią $x: (-4, 0), (-6, 0)$; z osią $y: (0, -12)$, b) $p = -5, q = -7$; z osią $x: (2, 0), (-12, 0)$; z osią $y: (0, -\frac{24}{7})$, c) $p = 2, q = -2$; z osią $x: (1, 0), (3, 0)$; z osią $y: (0, 6)$. 6. a) (3, 10), b) (1, 0), (-7, 0), c) (20, 0). 7. $y = \frac{1}{4}x^2 - 4$ lub $y = -\frac{1}{4}x^2 + 4$.

str. 198-200: 1. a) $p = 2, q = -9$; z osią $x: (-4, 0), (8, 0)$; z osią $y: (0, -8)$, b) $p = -2, q = -75$; z osią $x: (-7, 0), (3, 0)$; z osią $y: (0, -63)$, c) $p = 3, q = 5$; z osią $x: (2, 0), (4, 0)$; z osią $y: (0, -40)$, d) $p = -3, q = -9$; z osią $x: (-6, 0), (0, 0)$; z osią $y: (0, 0)$, e) $p = 0, q = -3$; z osią $x: (-3, 0), (3, 0)$; z osią $y: (0, -3)$, f) $p = \frac{1}{4}, q = \frac{1}{4}$; z osią $x: (0, 0), (\frac{1}{2}, 0)$; z osią $y: (0, 0)$, g) $p = -2, q = 5$; z osią $x: (-3, 0), (-1, 0)$; z osią $y: (0, -15)$, h) $p = 5, q = 2$; z osią $x: (3, 0), (7, 0)$; z osią $y: (0, -\frac{21}{2})$, i) $p = 10, q = 0$; z osią $x: (10, 0)$; z osią $y: (0, 300)$. 2. a) Do góry, (0, -3), b) w dół, (0, 15), c) do góry, (0, -28). 3. a) $(\frac{1}{6}; +\infty)$, b) $(-3; +\infty)$, c) $(-\infty; -10)$. 4. a) $y = -\frac{1}{2}(x+2)(x-4)$, b) $y = (x-2)^2 - 3$, c) $y = -2(x+2)^2 + 5$, d) $y = \frac{1}{4}(x+2)^2 + 1$, e) $y = -\frac{1}{9}(x+3)^2$, f) $y = \frac{1}{2}x(x+4)$. 5. a) $y = 2x^2 - 3x + 3$, b) $y = \frac{1}{3}(x+3)^2 + 2$, c) $y = \frac{1}{4}(x-2)(x-6)$, d) $y = -\frac{1}{10000}x^2 + 2$. 6. $y = -\frac{1}{9}(x+2)^2 - 1$. 8. a) Dwa punkty wspólne, b) dwa punkty wspólne, c) jeden punkt wspólny, d) brak punktów wspólnych. 9. a) 8, b) 16, c) 36. 10. a) $f_{\min}(-1) = -5,5, f_{\max}(3) = 6,5$, b) $f_{\max}(4) = 7, f_{\min}(2) = 5$, c) $f_{\min}(7) = 2,5, f_{\max}(6) = 5$. 11. a) $f_{\min}(2) = -1, f_{\max}(0) = 3$, b) $f_{\min}(2) = -1, f_{\max}(5) = 8$, c) $f_{\max}(-1) = 8, f_{\min}(0) = 3$. 12. a) $f_{\min}(-8) = 80, f_{\max}(-10) = 240$, b) $f_{\min}(-5) = -10, f_{\max}(4) = 800$, c) $f_{\max}(2) = 480, f_{\min}(-1) = 150$. 13. a) $f_{\min}(1) = -7, f_{\max}(3) = f_{\max}(-1) = 5$, b) $f_{\max}(3) = 6, f_{\min}(-1) = -42$, c) $f_{\min}(3) = -40, f_{\max}(-\frac{1}{2}) = 9$.

str. 203-205: 1. a) $x \in (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$, b) $x \in (5; 7)$, c) $x \in (-\infty; -17) \cup (-13; +\infty)$, d) $x \in (0; 3)$, e) $x = \frac{1}{2}$, f) $x \in (-\infty; -3) \cup (0; +\infty)$. 2. a) $x \in (-1\frac{1}{3}; \frac{1}{2})$, b) $x \in (-\infty; -1\frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{2}; +\infty)$, c) $x \in (-\infty; -1\frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{2}; +\infty)$, d) $x \in (-1\frac{1}{3}; \frac{1}{2})$, e) $x \in (-\infty; -1\frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{2}; +\infty)$, f) $x \in (-1\frac{1}{3}; \frac{1}{2})$. 3. a) $x \in (-\infty; -3) \cup (\frac{1}{2}; +\infty)$, b) $x \in \mathbb{R}$, c) $x = \frac{1}{2}$, d) $x \in (-3; 4)$, e) $x \in (-\infty; -2) \cup (10; +\infty)$, f) $x \in \langle 1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2} \rangle$. 4. a) $x \in (-7; 7)$, b) $x \in (-\infty; -2\sqrt{10}) \cup (2\sqrt{10}; +\infty)$, c) $x \in (-\infty; -\frac{2}{7}) \cup (0; +\infty)$, d) $x \in (0; \frac{6}{5})$, e) $x \in \mathbb{R} \setminus \{7\}$, f) $x = -5$. 5. a) $x \in (-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$, b) brak rozwiązań, c) $x \in \mathbb{R}$, d) $x \in (0; \frac{7}{3})$, e) $x \in (-\infty; -\frac{9}{10}) \cup (0; +\infty)$, f) $x \in (-\infty; -3) \cup (\frac{2}{2}; +\infty)$, g) $x \in (-\infty; -\frac{1}{3}) \cup (2; +\infty)$, h) $x \in (-\frac{1}{2}; 4)$, i) $x \in \mathbb{R}$. 6. a) $x \in (-\infty; \frac{-13 - \sqrt{394}}{5}) \cup (\frac{-13 + \sqrt{394}}{5}; +\infty)$, b) $x \in (-\infty; \frac{1}{4}) \cup (2; +\infty)$, c) $x \in (-\infty; 1) \cup (1\frac{1}{2}; +\infty)$, d) $x \in \mathbb{R}$. 7. a) $(-\infty; -3) \cup (7; +\infty)$, b) $(-\infty; -3) \cup (7; +\infty)$, c) $(-3; 7)$. 8. a) Dla $x \in (-8; 5)$, b) dla $x \in (-\infty; -11) \cup (9; +\infty)$. 9. Dla