

## 24III T: Ciąg geometryczny.

Ciąg  $(a_n)$  nazywamy **geometrycznym**, jeśli ma co najmniej trzy wyrazy i każdy jego wyraz, z wyjątkiem pierwszego, powstaje w wyniku pomnożenia poprzedniego wyrazu przez pewną stałą liczbę  $q$ . Liczbę  $q$  nazywamy **ilorazem ciągu**. Ciąg geometryczny można opisać za pomocą wzoru rekurencyjnego.

$$a_{n+1} = a_n \cdot q$$

$$\text{Z tego wzoru wynika, że } q = \frac{a_{n+1}}{a_n} \text{ np. } q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2}$$

Oto przykłady ciągów geometrycznych. Oblicz ich ilorazy.

1.  $3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \dots$       3.  $-3, -0,3, -0,03, -0,003, -0,0003, \dots$

2.  $-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, -1, 2, -4, 8, \dots$       4.  $1 + \sqrt{2}, \sqrt{3} + \sqrt{6}, 3 + 3\sqrt{2}, 3\sqrt{3} + 3\sqrt{6}, \dots$

1.  $q = \frac{1}{3}$       2.  $q = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{4}{1}\right) = -2$       3.  $q = \frac{-0,3}{-3} = 0,1$

4.  $q = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{6}}{1 + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}(1 + \sqrt{2})}{1 + \sqrt{2}} = \sqrt{3}$

**Zadania do wykonania**

2. Podany ciąg jest ciągiem geometrycznym. Ustal jego iloraz i znajdź kolejny wyraz tego ciągu.

a)  $10, 100, 1000, \dots$       c)  $\frac{3}{7}, -1, \frac{7}{3}, -\frac{49}{9}, \dots$       e)  $200, 2, 0,02, 0,0002, \dots$

3. Podany ciąg jest ciągiem geometrycznym. Ustal jego iloraz i znajdź  $a_1$  i  $a_4$ .

a)  $a_1, -3, 15, a_4, \dots$       b)  $a_1, 2, 7, a_4, \dots$       c)  $a_1, 204, -68, a_4, \dots$

## 25 III T: Ciąg geometryczny cd.

W ciągu geometrycznym  $(a_n)$  o pierwszym wyrazie  $a_1$  i ilorazie  $q$  początkowe wyrazy są równe:

$$\begin{aligned} a_1 & \\ a_2 &= a_1 \cdot q \\ a_3 &= a_2 \cdot q = a_1 q^2 \\ a_4 &= a_3 \cdot q = a_1 q^3 \\ &\text{itd.} \end{aligned}$$

Równości te prowadzą do wzoru:

Wzór ogólny ciągu geometrycznego  $(a_n)$  o ilorazie  $q$ :

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Przykład Oblicz piąty wyraz ciągu geometrycznego, jeśli  $a_1 = 5, q = -2$

$$a_5 = 5 \cdot (-2)^4 = 5 \cdot 16 = 80$$

### Zadania do wykonania

Oblicz

a)  $a_3$  jeśli  $a_1 = -4$ ,  $q = \frac{1}{2}$

b)  $a_6$  jeśli  $a_1 = \frac{1}{3}$ ,  $q = -1$

c)  $a_5$  jeśli  $a_1 = 25$ ,  $q = \frac{1}{5}$

4. a) Pierwszym wyrazem ciągu geometrycznego jest liczba  $-0,15$ , a trzecim — liczba  $-6$ . Znajdź drugi wyraz tego ciągu.

b) Liczby  $25, x, y, 12\frac{4}{5}$  tworzą ciąg geometryczny. Znajdź liczby  $x$  i  $y$ .

Wskazówka a)  $q^2 = \frac{a_3}{a_1}$

b)  $q^3 = \frac{a_4}{a_1}$

25III (2h) T: Własności ciągu geometrycznego.

Liczby  $(a, b, c)$  w podanej kolejności tworzą **ciąg geometryczny**. Wówczas

$$q = \frac{b}{a} \quad \text{ i } \quad q = \frac{c}{b} \quad . \text{ Wynika z tego własność}$$

$$\frac{c}{b} = \frac{b}{a} \quad \text{ lub } \quad b^2 = ac \quad (\text{kwadrat środkowego wyrazu jest równy iloczynowi wyrazów sąsiednich})$$

PRZYKŁAD

Ciąg  $(27, 18, x + 5)$  jest geometryczny. Wtedy:

A.  $x = 4$

B.  $x = 5$

C.  $x = 7$

D.  $x = 9$

ROZWIĄZANIE

1° Korzystamy z zależności pomiędzy trzema wyrazami ciągu geometrycznego.

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2}$$

2° Podstawiamy odpowiednie wartości za  $a_1, a_2, a_3$  i obliczamy  $x$ .

$$\frac{18}{27} = \frac{x+5}{18}$$

$$27(x+5) = 324$$

$$27x + 135 = 324$$

$$27x = 324 - 135$$

$$27x = 189 \quad | : 27$$

$$x = 7$$

POPRAWNA ODPOWIEDŹ: C

### Zadania do rozwiązania

Liczby  $3x - 4$ ,  $8$ ,  $2$  w podanej kolejności są pierwszym, drugim i trzecim wyrazem ciągu geometrycznego. Wtedy:

A.  $x = -6$

B.  $x = 0$

C.  $x = 6$

D.  $x = 12$

ROZWIĄZANIE

1° Korzystamy z zależności pomiędzy trzema wyrazami ciągu geometrycznego.

2° Podstawiamy odpowiednie wartości za  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  i obliczamy  $x$ .

POPRAWNA ODPOWIEDŹ:

ZADANIE 264

zadanie sprawdzające

1 pkt

maj 2014

Liczby  $x - 2$ ,  $6$ ,  $12$  w podanej kolejności są trzema kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego. Liczba  $x$  jest równa:

A.  $5$

B.  $3$

C.  $2$

D.  $0$

ROZWIĄZANIE

26 III (2h) T: Ciąg geometryczny – zadania

11. Przyjmijmy, że ciąg  $(a_n)$  jest ciągiem geometrycznym.

a) Znajdź iloraz tego ciągu i  $a_{10}$ , jeśli  $a_1 = 1$  i  $a_{11} = 32$ .

b) Znajdź iloraz tego ciągu i  $a_{10}$ , jeśli  $a_9 = 0,28$  i  $a_{13} = 175$ .

c) Znajdź  $a_4$ , jeśli  $a_{10} = 24$  i iloraz wynosi  $q = \sqrt{2}$ .

d) Znajdź  $a_{10}$ , jeśli  $a_{13} = -1$  i  $a_{15} = -\frac{1}{9}$ .

Uzupełnij i rozwiąż d)

a)  $a_{11} = a_1 \cdot q^{10}$

$32 = 1 \cdot q^{10}$

$2^5 = (q^2)^5$

$q^2 = 2$

$q = \sqrt{2}$  lub  $q = -\sqrt{2}$

$a_{10} =$

lub  $a_{10} =$

b)  $a_9 \cdot q^4 = a_{13}$

$q^4 = \frac{a_{13}}{a_9} =$

$q = \pm \sqrt[4]{\quad} =$

$$\sqrt[4]{a} = \sqrt{\sqrt{a}}$$

$a_{10} =$

lub  $a_{10} =$

c)  $a_{10} = a_4 \cdot q^6$

$a_4 =$