1CLO – MATEMATYKA (16-17.05)

Zagadnienia do opracowania:

1. Zastosowania funkcji trygonometrycznych
2. Funkcje trygonometryczne kątów rozwartych

Powyżej wypisałam zagadnienia, które należy opracować.
Zagadnienia te są omówione w podręczniku "Prosto do matury 1" NOWA ERA.

Przydatne linki:

https://pistacja.tv/film/mat00717-sinus-cosinus-tangens-dowolnego-kata-rozwartego?playlist=901

https://szaloneliczby.pl/funkcje-trygonometryczne-w-ukladzie-wspolrzednych/

https://sites.google.com/site/piotrpawelzseeim/home/tablica-wartosci-funkcji-trygonometrycznych

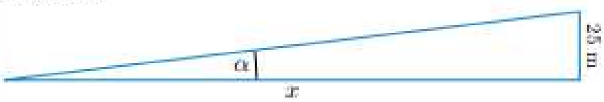
Teoria i przykłady:

5.2. Trygonometria – zastosowania

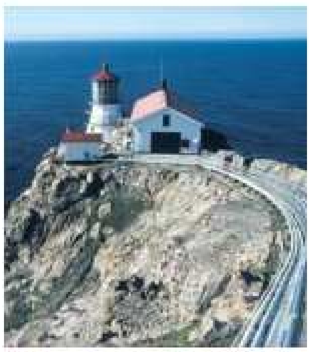
Wartości funkcji trygonometrycznych nie zależą od wielkości trójkąta prostokątnego, a jedynie od wielkości odpowiedniego kąta. Wykorzystuje się to w sytuacjach praktycznych.

Przykład 1

Wierzchołek latarni morskiej znajduje się 25 m nad poziomem morza i widać go z jachtu pod kątem α, którego tangens wynosi 0,0875. Jaka jest odległość jachtu od podnóża skarpy, na której stoi latarnia?



$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{25}{x}, \quad \text{czyli} \quad x = \frac{25}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{25}{0{,}0875} \approx 286 \text{ [m]}$$

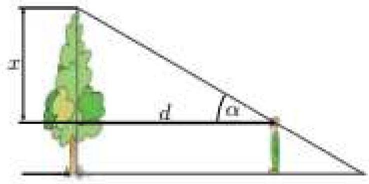


Jeśli chcemy znaleźć wartości funkcji trygonometrycznych, to korzystamy z odpowiedniego kalkulatora lub tablic matematycznych (zarówno kalkulator, jak i tablice podają wartości przybliżone). Tabela wartości funkcji trygonometrycznych znajduje się na str. 260.

Przykład 2

Obserwator widzi czubek drzewa odległego o $d = 65$ m pod kątem $\alpha = 29^\circ$ (oczy ma na wysokości 1,5 m nad ziemią). Jak wysokie jest drzewo?

$$\operatorname{tg} 29^\circ = \frac{x}{65}$$



Z tablic odczytujemy $\operatorname{tg} 29^\circ \approx 0{,}5543$, czyli $x \approx 65 \cdot 0{,}5543 \approx 36$ [m].
Wysokość drzewa jest więc równa około $36 + 1{,}5 = 37{,}5$ [m].

Ćwiczenie 1

Przyjmując, jak w przykładzie 2., że obserwator ma oczy na wysokości 1,5 m nad ziemią, oblicz wysokość drzewa, jeśli:

a) $\alpha = 40^\circ$, $d = 22$ m,   b) $\alpha = 14^\circ$, $d = 100$ m.

Przykład 3

Przekątna prostokątnej działki budowlanej ma długość 30 m i tworzy z krótszym bokiem działki kąt α taki, że $\cos\alpha = 0{,}6$. Ile metrów bieżących siatki potrzeba na jej ogrodzenie, jeżeli na bramę wjazdową należy zostawić 3 m?

Obliczamy długość jednego boku działki:

$\frac{y}{30} = \cos\alpha = 0{,}6$, czyli $y = 30 \cdot 0{,}6 = 18$ [m].

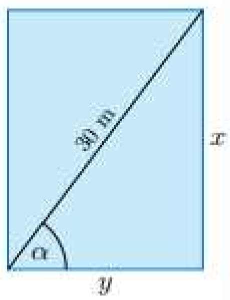
Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa:

$$x^2 = 30^2 - y^2 = 900 - 324 = 576$$

$$x = \sqrt{576} = 24 \text{ [m]}$$

Zatem obwód działki: $2x + 2y = 48 + 36 = 84$ [m].

Czyli siatki potrzeba $84 - 3 = 81$ [m].



Ćwiczenie 2

Oblicz obwód prostokąta, którego przekątna długości d tworzy z jednym z boków kąt o mierze α.

a) $d = 15$, $\cos\alpha = \frac{1}{5}$ b) $d = 8$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$

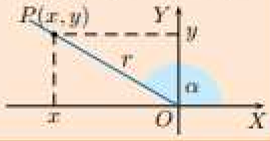
FUNKCJE TRYGONOMETRYCZNE KĄTÓW ROZWARTYCH

DEFINICJA

Niech $P(x, y)$ będzie dowolnym punktem leżącym na ramieniu końcowym kąta $\alpha \in \langle 0^\circ; 180^\circ \rangle$, różnym od początku układu współrzędnych. Wtedy:

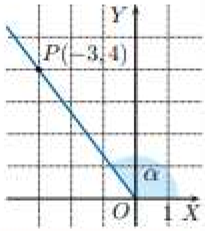
$\sin\alpha = \frac{y}{r}$, $\cos\alpha = \frac{x}{r}$, gdzie $r = \sqrt{x^2 + y^2}$,

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$ ($x \neq 0$, czyli $\alpha \neq 90^\circ$).



Uwaga. Każdy ze stosunków: $\frac{y}{r}$, $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{x}$ zależy wyłącznie od położenia ramienia końcowego kąta, a nie zależy od wyboru punktu P.

Przykład



Do ramienia końcowego kąta α należy punkt $P(-3, 4)$.
Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych tego kąta.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x} = -\frac{4}{3}$$

$r = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$, zatem $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$.

Dla $\alpha \in (0^\circ; 90^\circ)$ zachodzą nierówności: $\sin\alpha > 0$, $\cos\alpha > 0$, $\operatorname{tg}\alpha > 0$.
Dla $\alpha \in (90^\circ; 180^\circ)$ zachodzą nierówności: $\sin\alpha > 0$, $\cos\alpha < 0$, $\operatorname{tg}\alpha < 0$.

Ćwiczenie

Do ramienia końcowego kąta α należy punkt P. Przedstaw ten kąt na rysunku i oblicz wartości jego funkcji trygonometrycznych.

a) $P(-4, 3)$ b) $P(-8, 6)$ c) $P(-1, 3)$ d) $P(-2, 6)$

Aleksandra Lewczuk