10 Trzecie prawo Keplera

Satelita geostacjonarny

Satelita poruszający się na pewnej wysokości nad Ziemią obiega ją w takim samym czasie, w jakim nasza planeta wykonuje obrót dookoła własnej osi. Jeśli taki satelita znajduje się nad równikiem, to oglądany z Ziemi wygląda, jakby się wcale nie poruszał.

Satelita geostacjonarny znajduje się przez cały czas nad tym samym punktem Ziemi.

Może więc zostać wykorzystany jako nadajnik sygnałów odbieranych przez nieruchome anteny naziemne, np. anteny telewizji satelitarnej. Taką antenę wystarczy raz skierować we właściwym kierunku i nie trzeba jej więcej przestawiać.

Na jakiej wysokości powinien się znajdować satelita geostacjonarny? Okazuje się, że gdy znamy odległość od Ziemi oraz okres obiegu wokół niej jednego satelity, łatwo możemy znaleźć te wielkości dla pozostałych obiektów krążących wokół Ziemi. Ponieważ wiemy już, jak okrążałby Ziemię satelita na bardzo niskiej orbicie, skorzystamy z tych danych, aby opisać ruch satelity geostacjonarnego.

▲ Satelita geostacjonarny krąży w płaszczyźnie ziemskiego równika i obiega naszą planetę w takim samym czasie, w jakim Ziemia dokonuje jednego obrotu wokół własnej osi, czyli w ciągu około 24 h (rys. 2D s. 212).

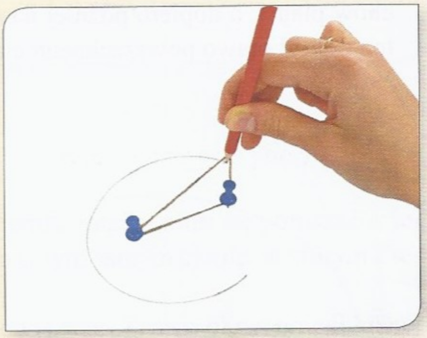
Trzecie prawo Keplera

Gdybyśmy zamiast satelity okrążającego Ziemię wzięli pod uwagę planetę okrążającą Słońce po okręgu o promieniu r w czasie T, otrzymalibyśmy taką samą zależność

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$$

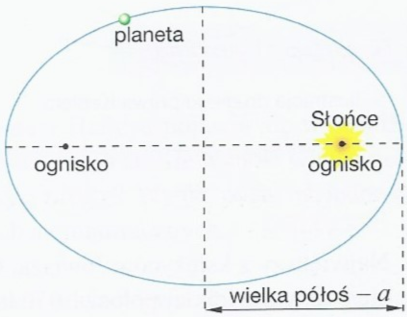
gdzie M jest masą Słońca. Jednak planety nie krążą wokół Słońca po okręgach, ale po nieco spłaszczonych orbitach w kształcie **elipsy**.

Doświadczenie



1. W deseczkę lub tekturkę wbij dwie pinezki.
2. Zwiąż końce kawałka nitki i załóż ją na pinezki.
3. Weź ołówek (lub długopis) i zaczep go o nitkę (jak na zdjęciu).
4. Odciągnij nitkę maksymalnie i przesuwaj grafit ołówka po tekturze. Na deseczce tworzy się owalna linia – elipsa. Miejsca wbicia szpilek to **ogniska** tej elipsy.

Odległość planety od Słońca zmienia się więc w czasie ruchu. Orbity większości planet są zbliżone do okręgów, ale już setki lat temu astronomowie obserwowali zjawiska wynikające z ich spłaszczenia. Niektóre komety okrążają Słońce po bardzo wydłużonych elipsach. Pojawiają się w pobliżu Słońca i Ziemi raz na kilkadziesiąt czy nawet kilkaset lat. Okazuje się, że zależność między wielkością orbity a okresem obiegu jest spełniona także dla orbit eliptycznych, tyle że zamiast promienia okręgu trzeba wziąć pod uwagę **wielką półoś elipsy** – a, czyli średnią odległość planety od Słońca.



▲ Planeta porusza się wokół Słońca po elipsie. Słońce znajduje się w ognisku elipsy.

Dla dowolnej planety zachodzi równość

$$\boxed{\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}}$$

Prawa strona jest jednakowa dla wszystkich planet, co oznacza, że stosunek $\frac{a^3}{T^2}$ również się nie zmienia.

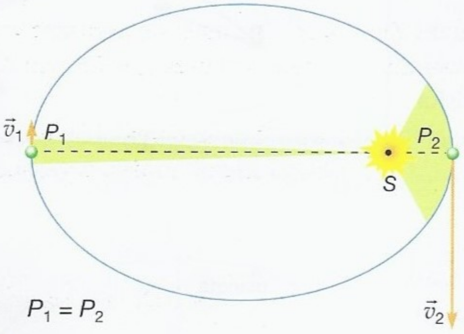
Trzecie prawo Keplera
Stosunek sześcianu wielkiej półosi orbity planety do kwadratu okresu jej obiegu wokół Słońca jest jednakowy dla wszystkich planet.

Analogiczna zależność prawdziwa jest również dla księżyców jednej planety, a także jej sztucznych satelitów. Stosunek $\frac{a^3}{T^2}$ wynosi $\frac{GM}{4\pi^2}$, z tym że M jest w tym wypadku masą planety.

Z historii

Trzecie prawo Keplera wyprowadziliśmy, korzystając z prawa powszechnego ciążenia. W historii fizyki kolejność była odwrotna. Najpierw Jan Kepler (1571–1630) odkrył swoje prawa, analizując obserwacje ruchów planet, a dopiero później na tej podstawie Newton odkrył prawo powszechnego ciążenia.

▲ Jan Kepler.



▲ Ilustracja drugiego prawa Keplera.

Jak brzmią pozostałe prawa Keplera?
Pierwsze prawo Keplera znasz, choć nie podawaliśmy jego nazwy: każda planeta krąży wokół Słońca po elipsie, a Słońce znajduje się w jednym z ognisk tej elipsy.
Drugie prawo Keplera mówi, że odcinek łączący Słońce z planetą w równych odstępach czasu zakreśla figury o równych polach (patrz rys. obok).

Przykład

Największy z księżyców Jowisza, Ganimedes, okrąża swoją planetę po orbicie w kształcie elipsy o wielkiej półosi 1 070 000 km w czasie 7,15 dnia. Drugi pod względem wielkości księżyc tej planety, Kallisto, porusza się po orbicie w kształcie elipsy o wielkiej półosi 1 883 000 km. Ile wynosi okres obiegu Kallisto?

Dane:
$a_1 = 1\,070\,000$ km
$T_1 = 7{,}15$ dnia
$a_2 = 1\,883\,000$ km

Szukane:
$T_2 = ?$

Rozwiązanie:

Korzystamy z trzeciego prawa Keplera. Stosunek $\frac{a^3}{T^2}$ jest dla obu księżyców taki sam (zależy wyłącznie od masy Jowisza). Wobec tego

$$\frac{a_1^3}{T_1^2} = \frac{a_2^3}{T_2^2}$$

$$T_2^2 = T_1^2 \cdot \frac{a_2^3}{a_1^3}$$

$$T_2 = T_1 \cdot \sqrt{\frac{a_2^3}{a_1^3}}$$

Podstawiamy dane liczbowe.

$$T_2 = 7{,}15 \text{ dnia} \cdot \sqrt{\frac{(1883\,000 \text{ km})^3}{(1070\,000 \text{ km})^3}} = 16{,}7 \text{ dnia}$$

Odpowiedź: Okres obiegu Kallisto wynosi 16,7 dnia.

Podsumowanie

- Aby unosić się stale nad tym samym miejscem nad Ziemią, satelita musi się poruszać w jej płaszczyźnie równikowej, wykonując jedno okrążenie w tym samym czasie, w którym Ziemia wykonuje obrót wokół własnej osi.
- Rozmiary orbit i okresy obiegu planet są ze sobą powiązane. Znając okres obiegu danej planety oraz średnią odległość Ziemi od Słońca i okres obiegu Ziemi, można wyznaczyć średnią odległość planety od Słońca.